

1.3 Rekenen met pijlen

1.3.1 Het optellen van pijlen

Je weet nu wat de *getallenlijn* is en dat 0 noch positief noch negatief is. We zullen nu een soort rekenen met pijlen gaan invoeren. We spreken af dat bij elk getal (positief, negatief of nul) een pijl (met deze lengte) hoort. Als het getal positief is wijst de pijl naar rechts en als het getal negatief is wijst de pijl naar links. Bij het getal 0 hoort een ‘gekke pijl’, n.l. eentje die een lengte 0 heeft en voor te stellen is door een punt.

VOORBEELD

Bij -5 hoort een pijl met lengte 5 die naar links wijst.

NB: Natuurlijk doen alle positieve en negatieve gebroken getallen en bijbehorende pijlen ook mee, maar in de uitleg en de voorbeelden zullen voornamelijk gehele getallen worden gebruikt.

In de wiskunde gebruiken we het teken “=” om aan te geven dat wat links van “=” staat hetzelfde is, of dezelfde waarde heeft, als wat rechts van “=” staat. Dat het woord “is” beslist niet hetzelfde is als het wiskundige teken “=” zal uit het volgende voorbeeld blijken.

VOORBEELD

$2 + 3 + 5 = 10$, heel flauw, maar wel waar. Eigenlijk staat er $10 = 10$.

Ook is waar:

$2 + 3 + 5 = 5 + 5 = 10$. Je hebt, heel juist, $2 + 3$ in de tweede stap vervangen door 5.

Maar echt onzin is:

$2 + 3 + 5 + 7 = 5 + 5 = 10 + 7 = 17$. Helaas is dit een veel gemaakte fout.

Misschien zeg je nu, ja maar het is toch 17? Dat komt dan, omdat je misschien de volgende zinnestjes door je hoofd laat gaan: 2 plus 3 is 5, en 5 plus 5 is 10, en 10 plus 7 is dus 17. Keurig uitgerekend, alleen helemaal fout opgeschreven, want neem maar eens het vetgedrukte gedeelte uit deze rekenkundige bewering. Daar staat letterlijk:

$$5 + 5 = 10 + 7$$

Het staat er echt. Je beweert dan dat $5 + 5$ dezelfde uitkomst heeft als $10 + 7$. We weten wel beter!

Dus, als je in gewoon Nederlands iets wilt uitleggen gebruik dan niet in plaats van het woordje “is” het teken “=”, en schrijf ook omgekeerd in een rekenkundige uitdrukking nooit het woordje “is”, ook al bedoel je braaf “=”. Schrijf nooit $5 + 2$ is 7.

Opgave 18 Schrijf de berekening met tussenstappen op.

a) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 =$

b) $13 + 862 + 138 + 987 =$

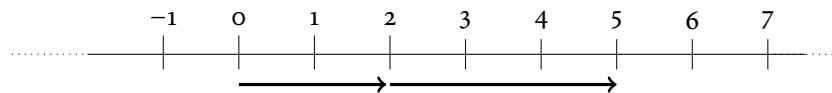
De **tegengestelde pijl** van een pijl krijg je door de pijl om te draaien. Als je dat vertaalt in getallen dan moet het tegengestelde van 3 wel -3 zijn en moet het tegengestelde van -3 wel 3 zijn.

Om het tegengestelde van een getal aan te duiden zetten we er een “-” teken voor. Lekker verwarrend. Want een minteken kan nu betekenen “negatief” of “tegengestelde” of “aftrekking”.

Voor het tegengestelde van -3 kunnen we $- - 3$ schrijven en het tegengestelde van -3 is 3. Dus $- - 3 = 3$!

Het tegengestelde van 0 is weer 0.

Kijk naar figuur 1.4.



Figuur 1.4

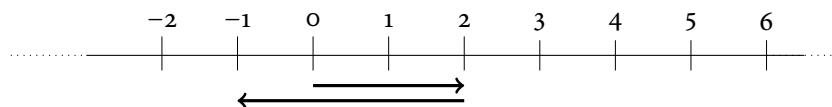
De pijl met lengte 3 is achter de pijl met lengte 2 gelegd en wijst nu naar 5. Dat bedoelen we met pijlen bij elkaar optellen. Een uitdrukking als $2 + 3 = 5$ zullen we lezen als:

Teken vanuit 0 op de getallenlijn een pijl met lengte 2 naar rechts, “gevolgd door” (dit is de +) een pijl met lengte 3 naar rechts, deze wijst naar 5.

Merk op dat het optellen van deze pijlen precies zo verloopt als het optellen van niet negatieve getallen! Inderdaad, precies zoals je al gewend bent.

We krijgen pas iets nieuws als we iets gaan bedenken voor het optellen van pijlen die zowel naar rechts als naar links mogen wijzen.

Kijk naar figuur 1.5.



Figuur 1.5

We houden vol dat het optellen van pijlen betekent dat we vanuit 0, de pijlen kop aan staart achter elkaar leggen langs de getallenlijn en kijken naar welk getal uiteindelijk wordt gewezen.

Als we dat doen moeten we in dit geval lezen: Leg een pijl met lengte 2 vanuit 0 neer, “gevolgd door” (d.w.z. +) een pijl met lengte 3 welke naar links wijst. Aangewezen wordt dan het getal -1. Vandaar:

- $2 + -3 = -1$

Met deze gedachtengang kun je ook het volgende begrijpen:

- $2 + 3 = 5$
- $2 + -3 = -1$
- $-2 + 3 = 1$
- $-2 + -3 = -5$

En in het bijzonder:

- $0 + 3 = 3$ en $3 + 0 = 3$
- $0 + -3 = -3$ en $-3 + 0 = -3$

We kunnen zo elk willekeurig gekozen tweetal pijlen bij elkaar optellen. En als we vanaf nu geen verschil meer maken tussen getallen en pijlen, kunnen we net zo goed zeggen dat we elk tweetal getallen bij elkaar kunnen optellen.

Opgave 19 Geef eerst een berekening met pijlen, neem dan de opgave over en zet het antwoord er achter.

- $1 + 2$
- $0 + -5$
- $-3 + -2$
- $-1 + \frac{4}{3}$

Opgave 20 Neem over en vul in:

- a) $-12 + 3 = \dots$ want de eerste pijl gaat van $\dots$ naar $\dots$
en de tweede van $\dots$ naar $\dots$
- b) $-3 + 12 = \dots$ want de eerste pijl gaat van $\dots$ naar $\dots$
en de tweede van $\dots$ naar $\dots$
- c) $-3 + -12 = \dots$ want de eerste pijl gaat van $\dots$ naar $\dots$
en de tweede van $\dots$ naar $\dots$

Opgave 21 Neem over en vul in:

- a) $8 = 10 + \dots$
- b) $-\frac{3}{5} = -5 + \dots$
- c) $-\frac{3}{5} = 5 + \dots$
- d) $-2 + -4 = -4 + \dots$

Opgave 22 Neem over en bereken (schrijf steeds de tussenstappen op!), denk aan het juist gebruik van het gelijkteken.

- a) $-3 + 5 + -2$
- b) $11 + -11 + -\frac{1}{2}$
- c) $-1 + -1 + 1 + -1$
- d) $1 + -5 + \frac{5}{6} + -\frac{1}{6}$

1.3.2 Het aftrekken van pijlen

De aftrekking van twee pijlen gaat als volgt: tel bij de 1^e pijl het tegengestelde van de 2^e pijl op. De aftrekking wordt aangegeven met het teken “-”.

VOORBEELD

$2 - 3 = 2 + -3$ en van dit laatste weten we hoe we dit moeten uitrekenen, zie figuur 1.5:

$$2 - 3 = 2 + -3 = -1.$$

Met deze afspraak over wat “aftrekken” is, kun je de volgende berekeningen begrijpen:

- $2 - 3 = 2 + -3 = -1$
- $2 - -3 = 2 + 3 = 5$
- $-2 - 3 = -2 + -3 = -5$

- $-2 - -3 = -2 + 3 = 1$

Merk op dat de aftrekking eigenlijk een optelling is, namelijk *optellen met het tegengestelde van de tweede pijl*. We kunnen alles uitleggen aan de hand van de optelling, d.w.z. het achter elkaar leggen van pijlen. De aftrekking, de vermenigvuldiging en ook de deling zijn helemaal terug te voeren tot het optellen, dus het achterelkaar leggen van pijlen.

LET OP: De volgorde waarin je twee getallen bij elkaar optelt doet er niet toe. Kijk maar naar het volgende voorbeeld:

$$5 + 3 = 8 \text{ en } 3 + 5 = 8,$$

$$2 + -4 = -2 \text{ en } -4 + 2 = -2.$$

Maar de volgorde waarin je twee getallen van elkaar aftrekt doet er WEL toe. Kijk maar:

$$5 - 3 = 2, \text{ maar } 3 - 5 = -2,$$

$$2 - -4 = 2 + 4 = 6, \text{ maar } -4 - 2 = -4 + -2 = -6!$$

Opgave 23 Schrijf onderstaande aftrekkingen eerst als optelling en geef dan een berekening met pijlen.

a) $1 - 2 = 1 + -2 = \dots$

b) $0 - -5 = \dots$

c) $-3 - -2 = \dots$

d) $-1 - \frac{4}{3} = \dots$

Opgave 24 Neem over, bereken en vul in op de ... :

a) $5 - 11 = \dots$ want de eerste pijl gaat van ... naar ...
en de tweede van ... naar ...

b) $-11 - 5 = \dots$ want de eerste pijl gaat van ... naar ...
en de tweede van ... naar ...

c) $-5 - -11 = \dots$ want de eerste pijl gaat van ... naar ...
en de tweede van ... naar ...

Opgave 25 Maak onderstaande sommen kloppend.

a) $8 = 10 - \dots$

b) $-\frac{3}{5} = -5 - \dots$

c) $-\frac{3}{5} = 5 - \dots$

d) $-2 + -4 = -4 - \dots$

Opgave 26 Bereken (geef steeds tussenstappen!).

a) $-3 - 5 + -2$

b) $11 - -11 + -\frac{1}{2}$

c) $-1 + -1 - 1 - -1$

d) $1 - -5 - \frac{5}{6} - \frac{1}{6}$

1.3.3 De vermenigvuldiging

We gaan nu afspreken wat we bedoelen met uitdrukkingen zoals 3×4 , die we overigens de **vermenigvuldiging** van 3 met 4 zullen noemen. We spreken dit uit als *drie keer vier*.

3×4 betekent:

- maak de pijl die van 0 naar 4 wijst 3 keer zo lang.

Deze wijst vervolgens naar 12. De uitkomst van deze vermenigvuldiging is dus 12. Vandaar het resultaat: $3 \times 4 = 12$.

En als het eerste getal negatief is, zoals in -3×4 , dan spreken we af:

- maak het tegengestelde van de pijl die van 0 naar 4 wijst 3 keer zo lang.

Dat betekent dat $-3 \times 4 = -12$ waar moet zijn.

Dus het eerste getal (pijl) in de vermenigvuldiging vertelt hoeveel langer of korter de tweede pijl moet worden én of je die pijl moet omdraaien of niet!

Als ook het tweede getal negatief is, dan geldt dezelfde afspraak.

-3×-4 betekent:

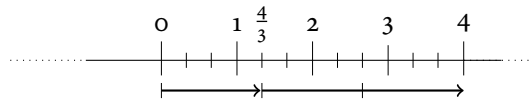
- maak het tegengestelde van de pijl die van 0 naar -4 wijst 3 keer zo lang.

Als je dit uittekent, zie je dat:

$$-3 \times -4 = 12!$$

Als het eerste getal van de vermenigvuldiging een breuk met teller 1 is, zoals in $\frac{1}{3} \times 4$, dan betekent dit volgens de bovenstaande afspraak:

- maak de pijl die van 0 naar 4 wijst $\frac{1}{3}$ keer zo lang. Resultaat: een pijl die naar $\frac{4}{3}$ wijst!



Figuur 1.6

Vandaar: $\frac{1}{3} \times 4 = \frac{4}{3}$ en ook $-\frac{1}{3} \times 4 = -\frac{4}{3}$. Zie ook figuur 1.6. Je kunt nu gemakkelijk zelf bedenken waarom $0 \times 4 = 0$ en $4 \times 0 = 0$ is.

Hier is waarschijnlijk een verschil met wat je op de basisschool hebt gedaan: Bij een breuk groter dan 1 halen we in het algemeen NIET de helen eruit. We doen dat alleen als het handig is voor een berekening. We laten $\frac{4}{3}$ als antwoord staan en maken er meestal niet de samengestelde breuk $1\frac{1}{3}$ van. De afspraak dat we altijd vereenvoudigen blijft wel van kracht. Bijvoorbeeld $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

Later dit jaar krijg je algebra en breuken met letters, dan schrijven we nooit samengestelde breuken.

Wees er nogmaals op bedacht dat als we over pijlen spreken we net zo goed getallen hadden kunnen zeggen. Als we met gehele getallen bezig zijn kunnen we "vermenigvuldigen" ook opvatten als herhaald pijlen optellen.

$$3 \times 4 = 4 + 4 + 4 \text{ en ook } 4 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3$$

$$3 \times -4 = -4 + -4 + -4 = -12$$

$$-3 \times 4 = -4 + -4 + -4 = -12$$

$$-3 \times -4 = 4 + 4 + 4 = 12.$$

Vaak zullen we daarom zeggen dat het *vermenigvuldigen* herhaald *optellen* is.

Opgave 27 Geef bij onderstaande sommen een berekening met pijlen. Schrijf daarna de som over en zet het antwoord erachter. *Let op: het tweede getal beschouwen we steeds als de pijl, het eerste getal vertelt of de pijl wel of niet omgedraaid moet worden en hoeveel keer zo lang hij wordt.*

a) $2 \times \frac{2}{3}$

d) -2×-4

b) 5×-1

e) $\frac{1}{4} \times \frac{4}{7}$

c) -1×5

f) $-\frac{1}{5} \times 10$

Opgave 28 Neem over, bereken en vul in op de ... :

- a) $-7 \times 3 = \dots$ want het tegengestelde van de pijl van o naar ...
wordt ... keer zo lang
- b) $11 \times -2 = \dots$ want de pijl van o naar ...
wordt ... keer zo lang
- c) $-5 \times -6 = \dots$ want het tegengestelde van de pijl van o naar ...
wordt ... keer zo lang

Je begrijpt nu het volgende rijtje vermenigvuldigingen:

- $5 \times 7 = 35$
- $5 \times -7 = -35$
- $-5 \times 7 = -35$
- $-5 \times -7 = 35$

De vuistregel of het ezelsbruggetje dat je hieruit kunt afleiden is dat als je twee getallen met elkaar vermenigvuldigt, die hetzelfde teken hebben, de uitkomst positief is. En als de getallen in teken verschillen, de uitkomst negatief is. Voor het gemak zeggen we wel bij vermenigvuldigen:

- plus $\times$ plus is plus
- plus $\times$ min en ook min $\times$ plus is min
- min $\times$ min is plus

Dit is natuurlijk slordig taalgebruik, maar de goede verstaander weet wat je bedoelt. Merk op dat de volgorde van vermenigvuldigen er niet toe doet.

KIJK MAAR

$$-3 \times 4 = -12 \text{ en } 4 \times -3 = -12$$

$$\text{Dus: } -3 \times 4 = 4 \times -3.$$

NOG EEN VOORBEELD

$$-3 \times -4 = 12 \text{ en } -4 \times -3 = 12$$

$$\text{Dus: } -3 \times -4 = -4 \times -3.$$

Afspraak: *staan er haakjes in een berekening, bereken dan eerst de waarde van wat tussen haakjes staat. Ga dan pas verder!*

Ook geldt het volgende (reken het maar na):

$$3 \times (5 \times 4) = (3 \times 5) \times 4 = (3 \times 4) \times 5.$$

Als er meer dan twee getallen opgeteld of vermenigvuldigd moeten worden, mag je de volgorde zelf kiezen. Bijvoorbeeld:

$$3 + 4 + 5 = 7 + 5 = 12$$

$$3 + 4 + 5 = 3 + 9 = 12$$

$$3 + 4 + 5 = 8 + 4 = 12$$

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 5 = 2 \times 5 = 10$$

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 5 = \frac{1}{2} \times 20 = 10$$

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 5 = 2\frac{1}{2} \times 4 = 10$$

Maar pas op. als het gaat om optellen en vermenigvuldigen door elkaar, dan kan dit niet. Er is een vaste afspraak dat vermenigvuldigen vóór optellen gaat. Dit doen we straks in paragraaf 1.3.6.

Let op bij aftrekken. Als je er een optelling van maakt, kun je de volgorde weer zelf kiezen:

$$6 - 4 - 2 =$$

$$6 + -4 + -2 = 2 + -2 = 0$$

$$6 + -4 + -2 = 6 + -6 = 0$$

$$6 + -4 + -2 = 4 + -4 = 0$$

Opgave 29 Bereken en let bij de tussenstappen op het juiste gebruik van het gelijkteken. (*Doe het handig!*)

a) $-\frac{7}{91} + \frac{1}{2} - \frac{84}{91}$

b) $-25 \times 8 \times -\frac{1}{5}$

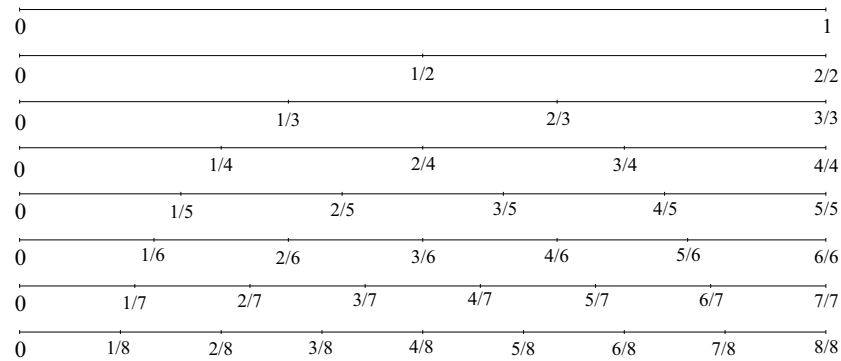
c) $11 \times -20 \times -5 \times -4$

d) $\frac{1}{5} \times 7 \times \frac{1}{11} \times 15 \times 22$

e) $\frac{1}{2} \times 20 \times 81 \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{9}$

1.3.4 Optellen en vermenigvuldigen van breuken

Als je de teller en de noemer van een breuk met hetzelfde getal vermenigvuldigt, krijg je een andere schrijfwijze voor hetzelfde getal.



Figuur 1.7

Dat dit waar moet zijn, kun je begrijpen als je figuur 1.7 goed bestudeert. Je ziet daar bijvoorbeeld dat $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$. Je kunt een breuk op veel manieren schrijven.

Met deze regel kun je ook breuken vereenvoudigen. De afspraak is dat je een breuk altijd zo ver mogelijk vereenvoudigt.

Opgave 30 Schrijf onderstaande getallen met noemer 60.

Voorbeeld: $0,2 = \frac{2}{10} = \frac{12}{60}$

a) 6 c) $1\frac{1}{5}$ e) 0

b) $-\frac{11}{15}$ d) 0,35 f) -1,1

Opgave 31 Schrijf als breuk.

a) $7\frac{1}{7}$ c) 4,3 e) 9,75

b) $-4\frac{3}{10}$ d) $-8\frac{2}{3}$ f) -2,111

Opgave 32 Schrijf als breuk en/of vereenvoudig.

a) $\frac{15}{54}$ c) $\frac{42}{7000}$ e) -3,15

b) -1,4 d) $\frac{1470}{1875}$ f) $\frac{22}{222}$

We noemen twee breuken **gelijknamig** als ze dezelfde noemer hebben. Zoals we al eerder gezien hebben, is elk geheel getal op te vatten als breuk met noemer 1. Bijvoorbeeld $3 = \frac{3}{1}$.

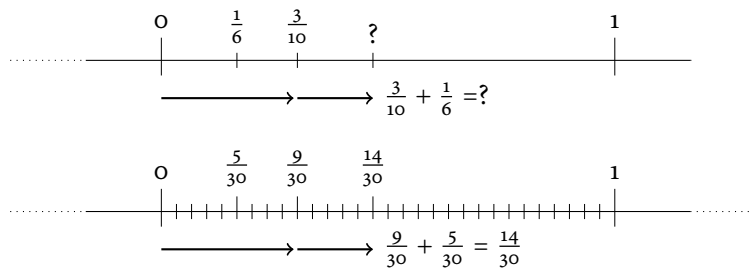
Het volgende tweeregelige recept vertelt je hoe je twee breuken bij elkaar kunt optellen. Het voorbeeld helpt je de juistheid van deze regel in te zien.

- MaaK eerst de noemers gelijknamig. Dit wordt ook de noemer van de uitkomst.*
- Tel dan de tellers bij elkaar op. Zet deze nieuwe teller boven de nieuwe noemer.*

VOORBEELD

$$\frac{3}{10} + \frac{1}{6} = \frac{9}{30} + \frac{5}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$$

Dat dit waar is, kun je begrijpen door het volgende te bedenken. Heb je eenmaal het stukje getallenlijn tussen 0 en 1 in 30 gelijke stukken verdeeld en wijst er een pijl met een lengte van 9 van deze stukjes naar rechts gevolgd door nog een pijl die weer eens 5 stukjes lang is, dan wordt uiteindelijk naar het eind van het 14^e stukje gewezen. Zie figuur 1.8 hieronder.



Figuur 1.8

Je ziet dat je blij mag zijn dat je niet elke berekening in woorden hoeft te doen, maar dat we er een heel erg handige notatie en handige regels voor hebben.

Opgave 33 Neem over en bereken (Je hoeft geen pijlen te tekenen, maar noteer wel alle tussenstappen!).

a) $\frac{1}{3} + \frac{3}{7}$

c) $12\frac{1}{6} + 1\frac{1}{14}$

e) $\frac{14}{3} + \frac{3}{14}$

b) $2\frac{3}{4} + 3\frac{3}{8}$

d) $\frac{4}{3} + \frac{17}{3}$

f) $8\frac{2}{3} + 1\frac{5}{9}$

Opgave 34 Neem over en bereken (met tussenstappen!).

a) $-12\frac{3}{4} + 1\frac{1}{7}$ c) $-\frac{12}{7} - \frac{13}{14}$ e) $\frac{15}{4} + -\frac{5}{6}$

b) $\frac{123}{4} - 1\frac{1}{8}$ d) $-\frac{17}{3} - -\frac{1}{7}$ f) $-3\frac{2}{7} + 1\frac{3}{5}$

Opgave 35 Neem over en bereken (met tussenstappen!).

a) $\frac{117}{3} - -\frac{117}{4}$ c) $-\frac{1}{16} + \frac{1}{8} - -\frac{1}{32}$ e) $-\frac{3}{6} + \frac{1}{2}$

b) $-\frac{12}{72} + \frac{3}{8} + \frac{1}{9}$ d) $\frac{12}{17} - -\frac{1}{2}$ f) $\frac{18}{5} + \frac{18}{25}$

Opgave 36 Neem over en bereken (met tussenstappen!).

a) $-\frac{2}{3} + 1\frac{1}{4} - -\frac{3}{8}$ d) $12\frac{1}{10} + 3\frac{1}{5} - 1\frac{2}{15}$

b) $\frac{1}{2} - -\frac{2}{8} + -\frac{1}{3}$ e) $\frac{8}{9} + \frac{9}{8} - \frac{8}{8} + \frac{9}{9}$

c) $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{2}{6} - \frac{2}{12}$ f) $\frac{6}{11} - \frac{11}{6} + \frac{5}{11}$

Opgave 37 Neem over en bereken (met tussenstappen!).

a) $1,6 + 2\frac{2}{3}$ c) $-3\frac{2}{5} + 0,25$ e) $0,11 + -1\frac{49}{50}$

b) $0,25 - \frac{1}{3} + 0,5$ d) $-2\frac{6}{7} - 0,5$ f) $2,125 + 5\frac{3}{8}$

Voor het vermenigvuldigen van twee breuken zal de volgende regel blijken te gelden.

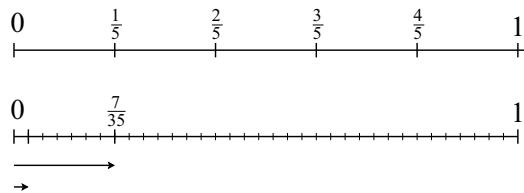
$$\bullet \frac{\text{teller}_1}{\text{noemer}_1} \times \frac{\text{teller}_2}{\text{noemer}_2} = \frac{\text{teller}_1 \times \text{teller}_2}{\text{noemer}_1 \times \text{noemer}_2}$$

VOORBEELD

$$\frac{2}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{35}$$

Dat dit precies zo werkt, is als volgt in drie stappen te verklaren:

- Stap 1. Om $\frac{1}{7} \times \frac{1}{5}$ uit te rekenen moeten we volgens de uitleg bij figuur 1.6. de pijl met lengte $\frac{1}{5}$ in 7 stukjes verdelen. Neem eerst eens het stuk op de getallenlijn tussen 0 en 1. Verdeel dit stuk in 35 gelijke stukken (zie figuur 1.9). Van de pijl met lengte $\frac{1}{5}$ kun je ook zeggen dat hij een lengte $\frac{7}{35}$ heeft. Daar weer het 7^e deel van nemen levert een pijl met lengte $\frac{1}{35}$ op. Vandaar dat $\frac{1}{7} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{35}$ waar is.



Figuur 1.9

- Stap 2. $\frac{2}{7} = 2 \times \frac{1}{7}$ en $\frac{3}{5} = 3 \times \frac{1}{5}$.

- Stap 3. Dus is $\frac{2}{7} \times \frac{3}{5} = 2 \times \frac{1}{7} \times 3 \times \frac{1}{5} = 2 \times 3 \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{5} = 6 \times \frac{1}{35} = \frac{6}{35}$.

Elke keer, als je twee breuken met elkaar zou vermenigvuldigen, zou je zo kunnen laten zien dat de regel van teller maal teller en noemer maal noemer werkt.

LET OP:

- Bij vermenigvuldigen met samengestelde breuken, zoals bijvoorbeeld $2\frac{1}{3}$ en $3\frac{1}{7}$, maak je eerst breuken van deze getallen. Dus

$$2\frac{1}{3} \times 3\frac{1}{7} = \frac{7}{3} \times \frac{22}{7} = \frac{22}{3}.$$

- Bij $-\frac{1}{4} \times -\frac{1}{7}$ bedenk je eerst of het antwoord positief of negatief is en dan ga je verder. Dus

$$-\frac{1}{4} \times -\frac{1}{7} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{28}.$$

Zo ook bij

$$\frac{1}{4} \times -\frac{1}{7} = -\left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{7}\right) = -\frac{1}{28}.$$

- Vereenvoudig de breuken altijd eerst, als dat kan! Zie bijvoorbeeld opgave 38c.

NB: In de noemer van een breuk kan, zoals we boven al gezien hebben, geen 0 staan!

Breuken kunnen worden vereenvoudigd door teller en noemer door eenzelfde getal te delen.

VOORBEELD

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ (teller en noemer zijn door 2 gedeeld)}$$

Opgave 38 Vereenvoudig.

a) $\frac{3}{9}$

c) $\frac{27}{63}$

e) $\frac{35}{42}$

g) $\frac{99}{121}$

b) $\frac{16}{32}$

d) $\frac{128}{256}$

f) $\frac{60}{72}$

h) $\frac{17}{51}$

Voor we vermenigvuldigen wordt van alle samengestelde breuken eerst enkelvoudige breuken gemaakt.

VOORBEELD

$$3\frac{7}{9} = \frac{34}{9}$$

$$\text{dus } 3\frac{7}{9} \times \frac{3}{17} = \frac{34}{9} \times \frac{3}{17} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{1} = \frac{2}{3}$$

Opgave 39 Neem over en bereken. (Schrijf altijd de tussenstappen erbij, óók als het niet gevraagd wordt!)

a) $\frac{1}{3} \times \frac{2}{4}$

c) $\frac{4}{7} \times \frac{3}{21}$

e) $12\frac{1}{3} \times 2\frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{7} \times \frac{7}{3}$

d) $1\frac{1}{7} \times 3\frac{2}{7}$

f) $3\frac{1}{5} \times 1\frac{1}{16}$

Opgave 40 Neem over en bereken.

a) $2\frac{1}{7} \times -\frac{3}{4}$

c) $-2\frac{1}{3} \times -3\frac{1}{7}$

e) $-17 \times \frac{3}{17}$

b) $3\frac{1}{5} \times -\frac{3}{2}$

d) $-12\frac{1}{7} \times 7$

f) $-13 \times -2\frac{6}{13}$

Opgave 41 Neem over en bereken.

a) $-\frac{2}{3} \times -\frac{5}{6}$

c) $-1\frac{1}{2} \times -2\frac{1}{3}$

e) $-1\frac{3}{5} \times 4$

b) $\frac{5}{9} \times -\frac{3}{4}$

d) $\frac{100}{101} \times -0,101$

f) $2\frac{2}{3} \times 0,75$

Vaak is het handig om al vóór het vermenigvuldigen kruislings weg te delen:

VOORBEELD

$$\frac{2}{7} \times \frac{14}{6} = \frac{2 \times 14}{7 \times 6} = \frac{1 \times 2}{1 \times 3} = \frac{2}{3} \quad (2 \text{ en } 6 \text{ zijn door } 2 \text{ gedeeld en } 7 \text{ en } 14 \text{ door } 7)$$

$$\frac{3}{8} \times \frac{16}{15} = \frac{3 \times 16}{8 \times 15} = \frac{1 \times 2}{1 \times 5} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{72}{121} \times \frac{11}{9} = \frac{72 \times 11}{121 \times 9} = \frac{8 \times 1}{11 \times 1} = \frac{8}{11}$$

Opgave 42 Neem over en bereken.

a) $3\frac{2}{7} \times -\frac{12}{23}$

c) $\frac{15}{24} \times \frac{3}{5}$

e) $-6\frac{2}{5} \times -\frac{3}{16}$

b) $-7\frac{1}{3} \times -\frac{21}{6}$

d) $\frac{17}{19} \times -7\frac{3}{5}$

f) $-3\frac{3}{14} \times \frac{8}{9}$

Opgave 43 Neem over en bereken.

a) $12\frac{1}{3} \times -\frac{18}{37}$

c) $-123\frac{1}{3} \times \frac{3}{369}$

e) $17\frac{1}{3} \times 2\frac{1}{13}$

b) $7\frac{1}{7} \times \frac{12}{25}$

d) $12\frac{1}{9} \times -4\frac{1}{2}$

f) $-5\frac{1}{11} \times 4\frac{1}{8}$

Opgave 44 Neem over en bereken.

a) $17\frac{3}{4} \times -2\frac{3}{71}$

c) $-12\frac{1}{3} \times -\frac{6}{37}$

e) $6\frac{2}{7} \times 3\frac{7}{3}$

b) $-7\frac{1}{9} \times 1\frac{3}{32}$

d) $3\frac{1}{27} \times \frac{11}{18}$

f) $-7\frac{1}{6} \times 2\frac{4}{5}$

Opgave 45 Bereken op de handigste manier:

a) $8\frac{1}{8} \times \frac{856}{901} \times \frac{1802}{856}$

b) $7\frac{1}{3} \times 12 \times \frac{1}{22}$

1.3.5 De deling

In de deling $8 : 2 = 4$ heet het getal 8 het **deeltal**, het getal 2 de **deler** en 4 de **uitkomst**. Een deling wordt ook wel een **quotiënt** genoemd.

Dus:

- deeltal : deler = uitkomst

We spreken af dat dit waar is als het volgende klopt:

- uitkomst $\times$ deler = deeltal

VOORBEELD

$$8 : 4 = 2 \text{ omdat } 2 \times 4 = 8.$$

Uit deze afspraak volgt dat je niet door 0 kunt delen! Want als $8 : 0 = \text{uitkomst}$, dan moet $\text{uitkomst} \times 0 = 8$ zijn, wat onzin is. En als $0 : 0 = \text{uitkomst}$ dan moet $\text{uitkomst} \times 0 = 0$ zijn, maar elk getal keer 0 is gelijk aan 0, dus dan zou elk getal goed zijn als uitkomst en dat is ook een gekke situatie! We zeggen daarom wel:

Delen door 0 is flauwekul.

Je ziet dat delen aan de hand van het vermenigvuldigen wordt uitgelegd. De regels die voor het *teken* (dat wil zeggen + of -) van de uitkomst van een vermenigvuldiging gelden, gelden dus ook voor de deling.

Dus deel je twee getallen waarvan de tekens gelijk zijn, dan is de uitkomst positief en deel je twee getallen waarvan de tekens verschillen, dan is de uitkomst negatief.

Let op: $7 : 4 = \frac{7}{4}$, want $\frac{7}{4} \times 4 = \frac{7}{4} \times \frac{4}{1} = 7$.

Vandaar dat delingen zoals $7 : 4$ ook wel direct als $\frac{7}{4}$ gelezen worden. Omgekeerd wordt de breuk $\frac{7}{4}$ wel gelezen als 7 *gedeeld door* 4.

Zie je dat de deling $7 : 4$ dezelfde uitkomst heeft als de vermenigvuldiging $7 \times \frac{1}{4}$? Maar let weer op:

$$7 : \frac{1}{4} = 28, \text{ want } 28 \times \frac{1}{4} = 7 \text{ (vergelijk steeds } 10 : 2 = 5, \text{ want } 5 \times 2 = 10).$$

We hebben gezien:

$$7 : 4 = 7 \times \frac{1}{4} \quad \text{en}$$

$$7 : \frac{1}{4} = 7 \times \frac{4}{1}.$$

We zeggen wel voor het gemak:

- *delen door een getal is hetzelfde als vermenigvuldigen met het omgekeerde van dat getal.*

Deze truc werkt ook bij het op elkaar delen van twee breuken. Kijk maar:

$$\frac{5}{7} : \frac{2}{3} = \frac{5}{7} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{14}.$$

Controle:

$$\frac{15}{14} \times \frac{2}{3} = \frac{30}{42} = \frac{5}{7}.$$

Juist bij het delen door een breuk is de regel erg handig: *delen door een breuk is hetzelfde als vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk.* Nog een voorbeeld:

$$12 : \frac{3}{4} = 12 \times \frac{4}{3} = \dots = 16 \text{ (reken dit zelf na!)}$$

Controle:

$$12 : \frac{3}{4} = 16 \text{ klopt, want } \frac{3}{4} \times 16 = \dots = 12.$$

Opgave 46 Neem over en bereken.

- | | | | |
|--------------|-----------------------|-------------------------------|---------------------------------|
| a) $12 : 36$ | f) $12 : 4$ | k) $12 : \frac{1}{2}$ | p) $12 : -2$ |
| b) $12 : 24$ | g) $12 : 3$ | l) $12 : \frac{1}{4}$ | q) $-12 : -2$ |
| c) $12 : 12$ | h) $12 : 2$ | m) $12 : \frac{1}{100}$ | r) $\frac{1}{12} : 2$ |
| d) $12 : 6$ | i) $12 : 1$ | n) $12 : \frac{1}{1.000.000}$ | s) $\frac{1}{12} : \frac{1}{2}$ |
| e) $12 : 5$ | j) $12 : \frac{3}{4}$ | o) $12 : 0$ | t) $\frac{1}{12} : \frac{3}{4}$ |

Opgave 47 Neem over en bereken.

- | | | |
|-------------|----------------|--------------|
| a) $3 : 7$ | c) $0 : -100$ | e) $-99 : 1$ |
| b) $-8 : 5$ | d) $-18 : -54$ | f) $-2 : 0$ |

Opgave 48 Delen met breuken. Voorbeeld:

$$\frac{1}{3} : \frac{5}{12} = \frac{1}{3} \times \frac{12}{5} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}.$$

a) $\frac{1}{2} : \frac{3}{4}$

c) $\frac{7}{8} : \frac{1}{2}$

e) $\frac{11}{15} : \frac{3}{5}$

b) $\frac{3}{7} : \frac{3}{14}$

d) $\frac{1}{9} : \frac{3}{18}$

f) $-\frac{1}{4} : \frac{1}{9}$

Opgave 49 Delen met breuken. Voorbeeld:

$$1\frac{1}{10} : \frac{2}{3} = \frac{11}{10} : \frac{2}{3} = \frac{11}{10} \times \frac{3}{2} = \frac{33}{20} \text{ (of } 1\frac{13}{20}\text{)}.$$

a) $1\frac{1}{8} : \frac{1}{2}$

c) $-\frac{3}{5} : -\frac{3}{7}$

e) $-1\frac{4}{5} : \frac{5}{7}$

b) $\frac{2}{5} : -\frac{2}{3}$

d) $2\frac{2}{3} : 1\frac{3}{7}$

f) $3\frac{1}{4} : 1\frac{1}{9}$

Opgave 50 Delen met breuken.

a) $5 : \frac{1}{2}$

c) $3 : 0,6$

e) $1\frac{1}{9} : -3\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{2} : 5$

d) $-\frac{3}{5} : -2\frac{1}{2}$

f) $-2,7 : -1\frac{2}{7}$

We spreken af dat we voortaan altijd van een aftrekking een optelling maken.

VOORBEELD

$3 - 4 + 2$ lezen we voortaan als $3 + -4 + 2$

Het min-teken hoort dus altijd bij het getal erachter!

Samenvattend kunnen we zeggen dat al ons rekenen, tot nu toe, is gebaseerd op het optellen :

-aftrekken is optellen van negatieve getallen

-vermenigvuldigen is herhaald optellen

-delen is weer vermenigvuldigen met het omgekeerde.

1.3.6 De volgorde van berekeningen en haakjes

Als niet zomaar van links naar rechts gerekend moet worden, staan er haakjes in een berekening. De afspraak is dan dat je *eerst uitrekent wat tussen haakjes staat en dan pas verder gaat*. Dit wordt ook wel **haakjes wegwerken** genoemd.

Hier volgen wat voorbeelden:

$$(2 - 3) - 6 = -1 - 6 = -7$$

is hetzelfde als $2 - 3 - 6$.

Maar als de haakjes op een andere plaats staan dan verloopt de berekening heel anders:

$$2 - (3 - 6) = 2 - -3 = 2 + 3 = 5.$$

$$-(9 - 12) = - -3 = 3$$

Je ziet direct dat het voor de uitkomst heel veel uitmaakt waar de haakjes staan. Soms maakt het niets uit:

$$(2 + 3) + 6 = 5 + 6 = 11,$$

Maar ook

$$2 + (3 + 6) = 2 + 9 = 11.$$

Nu dan een voorbeeld waarin ook vermenigvuldiging staat:

$$2 - (3 \times -4) = 2 - -12 = 2 + 12 = 14,$$

Maar

$$(2 - 3) \times -4 = -1 \times -4 = 4.$$

Het is ook mogelijk dat er haakjes met daarbinnen weer haakjes staan. Zoals in:

$$\begin{aligned} ((2 - ((3 \times -4) \times (-5 + 1)) - -2) - 3) - 7 &= ((2 - (-12 \times -4) - -2) - 3) - 7 \\ &= ((2 - 48 + 2) - 3) - 7 \\ &= (-44 - 3) - 7 \\ &= -47 - 7 \\ &= -54. \end{aligned}$$

Een uitdrukking met veel haakjes gaat er al snel onduidelijk uitzien. Om het aantal haakjes enigszins te beperken, is de volgende afspraak gemaakt:

- *vermenigvuldigen (en dus ook delen) gaat vóór optellen (en dus ook aftrekken).*

En vergeet niet de regel waarmee we deze paragraaf begonnen:

- *reken eerst alles uit wat tussen de haakjes staat en ga dan pas verder.*

VOORBEELDEN

$$\begin{array}{rcl} 20 - 3 \times 4 = & \text{maar} & (20 - 3) \times 4 = \\ 20 - 12 = 8 & & 17 \times 4 = 68 \end{array}$$

Het is dus niet nodig om in $20 - 3 \times 4$ haakjes om de vermenigvuldiging te zetten.

1.3.7 Rekenen met samengestelde breuken

Kijk eens naar de volgende uitwerkingen:

$$2 \times (5 + 3) = 2 \times 8 = 16,$$

maar je zou ook kunnen zeggen

$$2 \times (5 + 3) = (5 + 3) + (5 + 3) = 5 + 5 + 3 + 3 = 2 \times 5 + 2 \times 3.$$

Evenzo:

$$21 \times (70 + 2) = 21 \times 70 + 21 \times 2.$$

En kijk eens naar

$$-2\frac{1}{3} = -(2 + \frac{1}{3}) = -1 \times (2 + \frac{1}{3}) = -1 \times 2 + -1 \times \frac{1}{3} = -2 - \frac{1}{3}$$

en *niet* $-2 + \frac{1}{3}$!

Samengestelde breuken zijn breuken van de vorm $2\frac{1}{3}$. Hier moet je dus lezen: $2 + \frac{1}{3}$ (en zeker *niet* $2 \times \frac{1}{3}$). Moet je $5 \times 2\frac{1}{3}$ uitrekenen, dan begrijp je nu (vanwege het bovenstaande) dat

$$\begin{aligned} 5 \times 2\frac{1}{3} &= 5 \times (2 + \frac{1}{3}) = 5 \times 2 + 5 \times \frac{1}{3} \\ &= 10 + \frac{5}{3} = \frac{30}{3} + \frac{5}{3} \\ &= \frac{35}{3} \text{ (of, als je wilt, } 11\frac{2}{3}\text{)}. \end{aligned}$$

Dit is een andere manier dan jullie eerder in dit boekje hebben geleerd:

$$5 \times 2\frac{1}{3} = 5 \times \frac{7}{3} = \frac{35}{3} \text{ (of } 11\frac{2}{3}\text{)}.$$

Let op bij optellen en aftrekken:

$$2\frac{1}{3} + 7\frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3} + 7 + \frac{1}{3} = 2 + 7 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 9 + \frac{2}{3} = 9\frac{2}{3},$$

Maar

$$2\frac{1}{3} - 7\frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3} - (7 + \frac{1}{3}) = 2 + \frac{1}{3} - 7 - \frac{1}{3} = 2 - 7 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -5.$$

Opgave 51 Welke van onderstaande berekeningen is juist?

$$2 + 3 \times 5 = 5 \times 5 = 25 \text{ of } 2 + 3 \times 5 = 2 + 15 = 17?$$

Opgave 52 Neem over en vul in:

a) $9 \times 3 - (5 - 1) = 9 \times 3 - \dots = \dots - \dots = \dots$

b) $7 + 5 \times -6 = 7 + \dots = \dots$

c) $(7 + 5) \times -6 = \dots \times -6 = \dots$

d) $-3 + 5 - 45 : 9 = -3 + 5 - \dots = \dots$

Opgave 53 Neem over en bereken:

a) $-3 \times -4 + 5 - 45 : -5$ c) $-3 \times -4 + (5 - 45) : -5$

b) $-3 \times (-4 + 5) - 45 : -5$ d) $-3 \times (-4 + 5 - 45) : -5$

Opgave 54 Haakjes vergeten. Neem over en zet links van = haakjes zodat het klopt. Voorbeeld:

$-2 - 3 - 4 = -1$ klopt niet, maar zet je slim haakjes, zoals
 $-2 - (3 - 4) = -2 - (-1) = -1$, dan klopt het wel!

a) $-27 - 9 + 21 = 3$ c) $-13 + 5 - 19 : 9 = -3$

b) $-27 - 9 + 21 = -57$ d) $-13 + 5 - 18 : 9 = -20$

Opgave 55 Neem over en bereken:

a) $(2 \times 3 - 7 \times -4) \times -5$ d) $-(2 \times 3 - 7) + 4 \times 2$

b) $-2 \times 3 - (7 \times -4 - 3)$ e) $-2 \times 3 - 7 \times (4 + 3 \times -1)$

c) $-2 \times (3 - 7) - 4 \times -3$ f) $-2 \times (3 - (4 \times 5 + 1) - 7)$

1.3.8 Machtsverheffen

Herhaald vermenigvuldigen wordt als volgt afgekort:

$$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2.$$

Spreek dit uit als: "2 tot de 5^e macht" of als "2 tot de 5^e".

En 3^2 wordt uitgesproken als "3 tot de 2^e" of ook als "3 *kwadraat*". 2^5 heet een **macht**. Daarin worden 2 het **grondtal** en 5 de **exponent** genoemd. Met $2^4 \times 10^6$ bedoelen we dus

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 16 \times 1.000.000 = 16.000.000$$

(let op: je ziet dat je eerst moet machtsverheffen voordat je gaat vermenigvuldigen!)

en

$$\left(\frac{3}{10}\right)^4 = \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{3^4}{10^4} = \frac{81}{10.000}.$$

Opgave 56 Schrijf als vermenigvuldiging en bereken:

a) 3^4 c) $2^3 \times 5^4$ e) 10^9

b) $\left(1\frac{1}{2}\right)^2$ d) $(-1)^{101}$ f) 4×10^3

Opgave 57 Neem over en schrijf als macht.

Voorbeeld: $2^2 \times 2 = 2^3$.

a) $2^4 \times 2^5$ c) $2^{12} \times 2$

b) $3^6 \times 3^7$ d) $2^3 \times 2^4$

Opgave 58 Neem over en schrijf als macht.

Voorbeeld: $2^9 : 2^2 = 2^7$ (want $2^7 \times 2^2 = 2^9$!)

a) $2^5 : 2^4$ c) $2^7 : 2^3$

b) $2^6 : 2$ d) $3^3 : 3$

Opgave 59 Neem over en bereken:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ c) $\left(\frac{1}{5}\right)^3$

b) $\left(\frac{2}{7}\right)^3$ d) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^3$

Opgave 60 Neem over en bereken:

a) $(((-2)^2)^2)^2$

c) $((-3)^2)^3$

b) $(-3)^3$

d) $((-\frac{1}{3})^2)^3$

Opgave 61 Vul de bijpassende exponenten in.

a) $(\frac{1}{10})^{\cdots} = \frac{1}{10000}$

b) $(\frac{2}{3})^{\cdots} = \frac{16}{81}$

c) $(\frac{1}{2})^{\cdots} = \frac{1}{256}$