

2.6 Pseudoconstructies

Bij het maken van constructies zijn we tot nu toe steeds uitgegaan van het gebruik van passer en liniaal. De liniaal mag je uitsluitend gebruiken om een lijn te tekenen door twee gegeven punten en voor het gebruik van de passer moet een middelpunt gegeven zijn en twee punten die de straal van de cirkel bepalen.

Alhoewel deze manier van tekenen soms heel wat lastiger is dan het tekenen met geodriehoek, is er het praktisch voordeel van uitvoering op iedere schaal en het theoretisch voordeel dat je kan bewijzen dat constructies exact kloppen.

In deze paragraaf gaan we kijken wat er gebeurt als we vasthouden aan de eis van exactheid en bewijsbaarheid, maar ons beperken wat betreft het gebruik van passer en liniaal, of: juist het gebruik uitbreiden door een soort gebruik toe te staan dat anders niet mag.

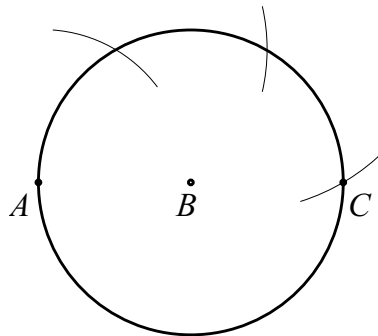
Wat voor constructies kan je nog maken als je alleen maar een liniaal hebt en geen passer? Dan kan je nog maar heel erg weinig. Probeer maar eens een lijnstuk in twee gelijke delen te verdelen zonder passer (en natuurlijk zonder de schaalverdeling van je liniaal te gebruiken!).

Interessanter zijn constructies waarbij je uitsluitend de passer mag gebruiken en absoluut geen liniaal. Al voor 1800 wist de Italiaan Mascheroni te bewijzen dat iedere constructie, die je met passer en liniaal kan maken, ook uit te voeren is met uitsluitend de passer. Niet dat het er makkelijker op wordt! We gaan één voorbeeld bekijken.

Opgave 38 De constructie van het midden van een lijnstuk, uitsluitend met de passer.

Teken twee punten A en B . We gaan het midden van lijnstuk AB construeren. Maar zelfs dit lijnstuk zelf mogen we niet tekenen, want we gebruiken alleen de passer!

- Teken $\odot(B, AB)$.
- Pas straal AB 3 keer af op de cirkel vanuit $A \Rightarrow$ punt C (op het verlengde van AB , zie tekening).
- Teken $\odot(A, AB)$ en $\odot(C, AC) \Rightarrow$ snijpunten D en E .
- Teken $\odot(D, AD)$ en $\odot(E, AE) \Rightarrow$ snijpunten A (was er al!) en M , waarbij M het gezochte midden van AB is!



De Grieken hebben heel veel mooie constructies verzonnen en bewezen, maar er waren enkele dingen die hun maar niet wilden lukken, ongetwijfeld tot hun grote frustratie!

De drie klassieke problemen waren:

- **De verdubbeling van de kubus:** hoe kan je de zijde van een kubus construeren waarvan de inhoud twee keer zo groot is als die van een kubus met gegeven zijde.
- **De kwadratuur van de cirkel:** Hoe kan je een vierkant construeren waarvan de oppervlakte even groot is als de oppervlakte van een gegeven cirkel.
- **De trisectie van een hoek:** Hoe kan je een gegeven hoek in drie gelijke delen verdelen.

Het was geen wonder dat het hun maar niet wilde lukken: in de negentiende eeuw hebben wiskundigen weten te bewijzen dat deze constructies onmogelijk uit te voeren zijn!

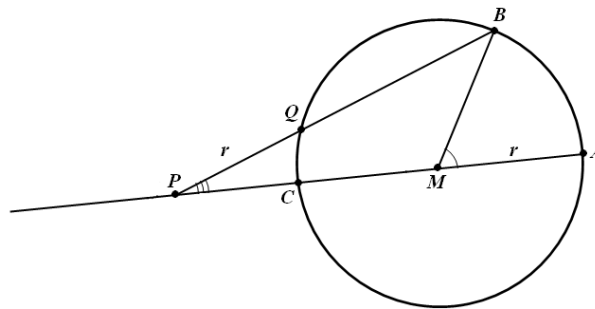
En toch: de beroemde Griekse wiskundige Archimedes vond een oplossing voor de trisectie van de hoek. Maar daarbij gebruikte hij de liniaal op een niet helemaal geoorloofde wijze. Hij zette er namelijk twee streepjes op. Een soort schaalverdeling dus. Een constructie waarbij je dat toestaat heet ook wel een glij-liniaalconstructie, of pseudoconstructie. Daar gaan we:

Opgave 39 Pseudoconstructie van de trisectie van een hoek

- a) Teken een cirkel om een punt M met daarop twee punten A en B (Zorg er voor dat $\angle AMB$,in ieder geval, niet veel

groter wordt dan een rechte hoek). We gaan $\angle AMB$ in drie gelijke delen verdelen.

- b) Zet twee streepjes op je liniaal waarvan de afstand gelijk is aan de straal van de cirkel. (Je mag ook de schaalverdeling op je liniaal gebruiken en die straal dus opmeten.)
- c) Het verlengde van AM snijdt de cirkel in C . Ga nu je liniaal zo neer leggen dat hij door B gaat en de twee streepjes op de cirkel en op het verlengde van MC liggen. Dan moet je heel wat heen en weer glijden! Als je die twee punten P en Q noemt, dan weet je dus dat P op AM ligt, Q op de cirkel ligt en dat de afstand PQ gelijk is aan de straal van de cirkel (als het niet duidelijk is, kijk dan op de tekening hieronder).
- d) $\angle APB$ is nu de gezochte hoek. Meet dit na door met je gedriehoek te meten of door $\angle APB$ driemaal over te brengen naar $\angle AMB$ en te laten zien dat dit precies past.



Opgave 40 Pseudoconstructie van de zevenhoek

Ook van een regelmatige zevenhoek is bewezen dat die niet op de gewone manier te construeren is. Maar met een pseudoconstructie lukt dat wel:

- a) Teken $\odot(M, r)$ zo groot als op je blaadje past en teken een diameter AB . Construeer vervolgens de diameter $CD \perp AB$. Construeer nu de middelloodlijn van AM . Teken tot slot $\odot(A, AC)$.
- b) Zet weer twee streepjes op je liniaal waarvan de afstand gelijk is aan de straal van de eerste cirkel. Leg je liniaal

nu zo neer dat die door M gaat, tussen punt A en C door-
gaat en dat het ene streepje op de middelloodlijn ligt van
 AM (noem dat punt P) en het andere streepje op de cir-
kel $\odot(A, AC)$ (punt Q). Het snijpunt van de lijn die je zo
krijgt met $\odot(M, r)$ tussen A en C noemen we R .

- c) AR is de zijde van de zevenhoek. Controleer dat door AR
zeven keer op de eerste cirkel af te passen vanuit A . Kom je
uit?
- d) Teken de zevenhoek nu met een kleurtje. Je kunt ook door
verschillende diagonalen te nemen met twee kleuren twee
mooie sterren er in tekenen.