

2.5 Regelmatige veelhoeken

Een **regelmatige veelhoek** is een figuur met zijden die allemaal even lang en hoeken die allemaal even groot zijn. We zijn er al een paar tegen gekomen: de regelmatige zeshoek, maar ook de gelijkzijdige driehoek en het vierkant zijn regelmatige veelhoeken!

Voor ieder geheel getal groter dan 2 heb je, afgezien van de grootte (dus de lengte van de zijden), precies een type regelmatige veelhoek. Zo heb je regelmatige vijfhoeken, zeshoeken, zevenhoeken maar ook tweehonderdnegentienhoeken.

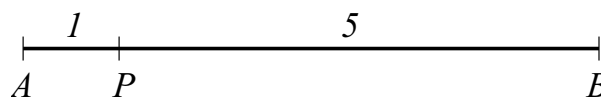
Hoe construeer je regelmatige veelhoeken? Met geodriehoek en een beetje rekenen kan je ze allemaal wel tekenen. Maar dat zijn geen echte constructies!

Het lijkt vreemd, maar: van niet zo erg veel regelmatige veelhoeken zijn constructies bekend. De Grieken waren er erg trots op dat ze een constructie vonden voor de vijfhoek. Maar het was voor hun vast vreselijk dat het niet lukte om bijvoorbeeld een negenhoek te construeren. Nou was het geen wonder dat het niet lukte, want zo'n 2000 jaar later werd bewezen dat het **onmogelijk** was om **een constructie te vinden voor een regelmatige negenhoek**! Toch hebben de Grieken nog wel een oplossing gevonden voor de negenhoek. Hoe? Met een zogenaamde pseudoconstructie, dat komt in de laatste paragraaf van dit hoofdstuk.

Opgave 31 Voor dat we beginnen met de constructies van tienhoeken en vijfhoeken gaan we eerst kijken naar een **verhouding**. Als op lijnstuk AB een punt P tussen A en B ligt zo dat de afstand van P tot B vijf keer zo groot is als de afstand van P tot A , dan zeggen we dat P het lijnstuk AB **verdeelt in de verhouding 1 : 5**. Dit wordt geschreven als: $AP : PB = 1 : 5$. Wanneer je kijkt naar onderstaand plaatje zie je dat hieruit volgt:

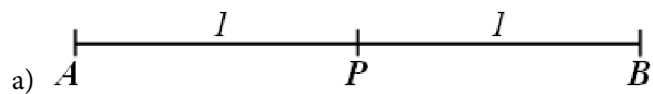
$$AP : AB = 1 : 6 \text{ en}$$

$$BP : AB = 5 : 6$$



Het is duidelijk dat deze verhoudingen niet gelijk zijn. $1 : 5$ is niet hetzelfde als $5 : 6$ omdat $5 : 6 = \frac{5}{6} : \frac{6}{6} = 5 : 6$, 2.

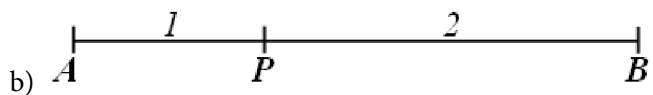
Ga bij de volgende verdelingen na dat de verhoudingen $AP : PB$ en $BP : AB$ wel steeds dichter bij elkaar komen.



Vul in:

$$AP : PB = \dots : \dots$$

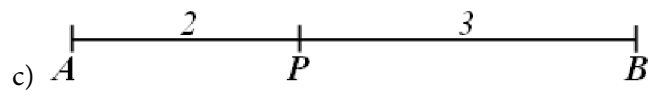
$$PB : AB = \dots : \dots = 1 : \dots$$



Vul in:

$$AP : PB = \dots : \dots$$

$$PB : AB = \dots : \dots = 1 : \dots$$



Vul in:

$$AP : PB = \dots : \dots = 1 : \dots$$

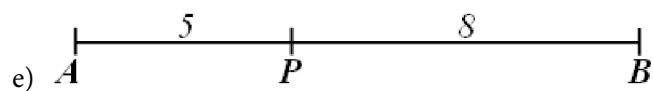
$$PB : AB = \dots : \dots = 1 : \dots$$



Vul in:

$$AP : PB = \dots : \dots = 1 : \dots$$

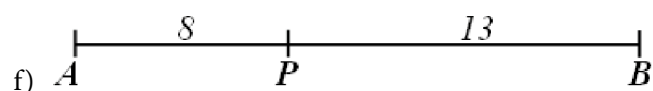
$$PB : AB = \dots : \dots = 1 : \dots$$



Vul in:

$$AP : PB = \dots : \dots = 1 : \dots$$

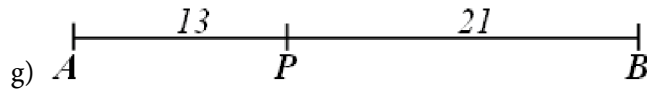
$$PB : AB = \dots : \dots = 1 : \dots$$



Vul in:

$$AP : PB = \dots : \dots = 1 : \dots$$

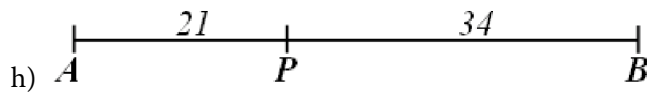
$$PB : AB = \dots : \dots = 1 : \dots$$



Vul in:

$$AP : PB = \dots : \dots = 1 : \dots$$

$$PB : AB = \dots : \dots = 1 : \dots$$



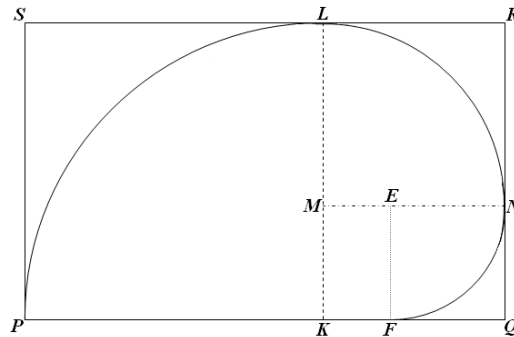
Vul in:

$$AP : PB = \dots : \dots = 1 : \dots$$

$$PB : AB = \dots : \dots = 1 : \dots$$

Opgave 32

- a) Het waren wederom de Grieken die een constructie vonden om een lijnstuk AB zo te verdelen met een punt P zodat $AP : PB$ precies hetzelfde is als $PB : AB$. *Het kleinste deel heeft dan dezelfde verhouding tot het grootste deel als het grootste deel tot het geheel.* Deze verhouding heeft veel fraaie eigenschappen. Nu gaan we die constructie uitvoeren. Begin met een lijnstuk AB over de hele breedte van je schrift. Richt in A een loodlijn op en teken hierop een punt C zodat $AC = \frac{1}{2}AB$. Je hebt geleerd hoe je dit helemaal met passer en liniaal kunt construeren, maar je mag ook wel smokkelen door dit met je geodriehoek te doen. Teken lijnstuk BC . Teken $\odot(C, AC)$. Het snijpunt met BC noem je D . Teken nu $\odot(B, BD)$ en snijd deze met AB . Het punt P dat je nu gevonden hebt is de **gouden snede**. Controleer, door nauwkeurig te meten met je geodriehoek, dat de verhouding $AP : PB$ inderdaad gelijk is aan $BP : AB$. Deze verhouding heet de **gouden snede verhouding**.
- b) Teken een rechthoek $PQRS$ waarbij PQ gelijk is aan AB en QR gelijk is aan de lengte van PB van onderdeel a). Deze vorm wordt **guldensnederrechthoek** genoemd. De vorm wordt als heel harmonisch ervaren en wordt veel gebruikt in de kunst.



c) We gaan nu in deze rechthoek de **guldensnede-spiraal** construeren:

- Teken K en L , zodat $PKLS$ een vierkant is.
- Teken $\odot(K, PK)$.
- Teken N en M , zodat $LMNR$ een vierkant is.
- Teken $\odot(M, LM)$.
- Teken E en F , zodat $EFQN$ een vierkant is.
- Teken $\odot(E, EN)$, enzovoort!

Opgave 33

- a) Dit deel mag je tekenen met je geodriehoek. Gebruik het liefst ruitjespapier van A4-formaat of groter. Teken midden op je blaadje een vierkantje $ABCD$ met zijden van een halve centimeter. Teken links daaraan vast een vierkant $ADEF$, daaronder een vierkant $BFGH$, rechts een vierkant $CHIJ$, daarboven een vierkant $EJKL$, links een vierkant $GLMN$, daaronder een vierkant $INOP$, rechts een vierkant $KPQR$, etc., etc..
- b) Teken nu steeds een kwart deel van de $\odot(A, AB)$ van B naar D , $\odot(A, AD)$ van D naar F , $\odot(B, BF)$ van F naar H en ga zelf zo verder. Je krijgt een guldensnedespiraal.
- c) Controleer dat de lengten van de zijden van de vierkanten de volgende rij vormen: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21..... Hoe lang zijn de zijden van de volgende 5 vierkanten? Deze reeks getallen worden de reeks van **Fibonacci** genoemd.
- d) Controleer dat de rechthoeken die je krijgt (zoals $IKMN$) naarmate ze groter worden steeds meer een **guldensnede-rechthoek** benaderen.

Opgave 34 De constructie van de tienhoek

Nu komen we toe aan een hele mooie, klassieke Griekse constructie: de constructie van de regelmatige tienhoek. Je zult zien dat we daarbij gebruik maken van de gulden snede en dat de tienhoek makkelijker te construeren is dan de vijfhoek. De zijde van de tienhoek staat namelijk in guldensnede verhouding met de straal van zijn omgeschreven cirkel! Daar gaan we:

- a) Teken een grote cirkel op een lege bladzijde in je schrift. Noem het middelpunt M . Teken een diameter AB (A en B liggen dus op de cirkel en M ligt op het lijnstuk AB). Construeer vervolgens een tweede diameter CD die loodrecht op AB staat (met behulp van twee cirkels met middelpunten A en B). Je hebt nu een cirkel met een kruis door het midden.
- b) We gaan nu het midden N van MD construeren met behulp van $\odot(D, MD)$ en een lijn door de snijpunten van deze cirkel met de eerste cirkel. Teken nu het lijnstuk BN .
- c) Op $\triangle MBN$ gaan we de guldensnede constructie toepassen. Teken $\odot(N, NM)$. Het snijpunt met BN noemen we K . Snijd nu $\odot(B, BK)$ met BM om het punt L te verkrijgen dat BM in gulden snede verhouding verdeelt.
- d) De lengte BL is nu de zijde van de tienhoek, zoals je kan controleren door deze lengte vanuit B tien keer af te passen op de eerste cirkel. Als je eerst vijf keer de ene kant en dan vijf keer de andere kant afpast dan moet je beide keren in A uit komen! Als dat in de verste verte niet uitkomt heb je iets in de constructie helemaal fout gedaan. Maar als het net niet helemaal uitkomt heb je wat te onnauwkeurig gewerkt (is je passerpunt wel scherp genoeg?). In de toekomst zal je (hopelijk) het bewijs te zien krijgen dat deze constructie exact klopt!
- e) Teken de tienhoek. Een vijfhoek kan je construeren door om de beurt een hoekpunt van de tienhoek te nemen. Maar een mooiere constructie komt nog.

Opgave 35 Schrijf de constructie van de regelmatige tienhoek puntsgewijs op.

Opgave 36 De constructie van de vijfhoek

- a) De constructie begint hetzelfde als die van de tienhoek. Begin daarom nog eens met een leeg blaadje en maak deeltje a) en b) van de opgave over de tienhoek nog eens opnieuw.
- b) Teken het snijpunt O van $\odot(N, BN)$ met MC . Ga na en probeer te beredeneren dat OM net zo lang is als BL , en...dus de zijde van de tienhoek is (en MC in de guldensnede verhouding verdeelt).
- c) AO is nu de zijde van de vijfhoek! Pas AO vanaf A vijf keer af op de eerste cirkel en als het goed is ben je weer terug in A . Noem de punten P , Q , R , en S .
- d) Teken nu, door de punten te verbinden, de regelmatige vijfhoek $APQRS$.
- e) Teken het **pentagram** $AQSPR$ in weer een andere kleur. Controleer dat de lijnstukken van het pentagram elkaar in gulden snedeverhouding snijden.

Opgave 37 Schrijf de constructie van de regelmatige vijfhoek puntsgewijs op.